

**Diethard Thieme**

**Übungen**

**zur**

**Baustatik**

**BS 03**

## Arbeitsgleichung

$$\begin{aligned}
 a_i = E_0 J_0 \delta_i^* &= \int_s L'_s \int_0^1 M^* M d\xi \\
 &+ \int_s L''_s \int_0^1 N^* N d\xi \\
 &+ \int_s L'''_s \int_0^1 V^* V d\xi \\
 &+ \int_c C^* C E_0 J_0 k_c \\
 &- \int_c C^* E_0 J_0 \delta_c \\
 &- \int_c M^* E_0 J_0 \varphi_c \\
 &+ \int_s L_s^{(4)} \left[ \int_0^1 M^* \frac{\Delta t}{h} d\xi + \int_0^1 N^* T_0 d\xi \right]
 \end{aligned}$$

## Reduzierte Stablängen

$$L'_s = L_s \frac{E_0 J_0}{E_s J_s}$$

$$L''_s = L_s \frac{E_0 J_0}{E_s A_s}$$

$$L'''_s = L_s \frac{E_0 J_0}{E_s A_s} \kappa$$

$$L_s^{(4)} = L_s E_0 J_0 \alpha_{t,s}$$

Fortsetzung nächste Seite

## STÜTZENFEDERUNGEN

$k_c$  = Federkonstante am Lager "c" (Verrückung / Kraft)

## STÜTZENVERRÜCKUNGEN / STÜTZENVERDREHUNGEN

$c$  bzw.  $\varphi_c$  = vorgegebene Stützenverrückung bzw. Stützenverdrehung des Lagers "c". Das Produkt  $C^* \delta_c$  bzw.  $M^* \varphi_c$  ist positiv, wenn  $\delta_c$  und die virtuelle Stützkraft  $C^*$  gleichgerichtet sind bzw. wenn  $\varphi_c$  und das virtuelle Einspannmoment  $M^*$  im gleichen Sinn drehen.

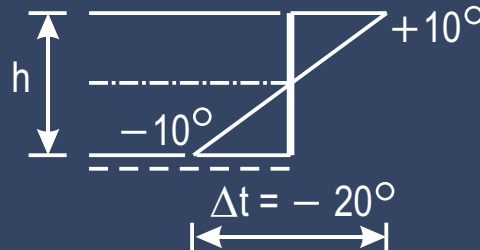
## TEMPERATUR

$T_0$  = gleichmäßige Temperaturänderung. Positiv, wenn der Stab erwärmt wird.

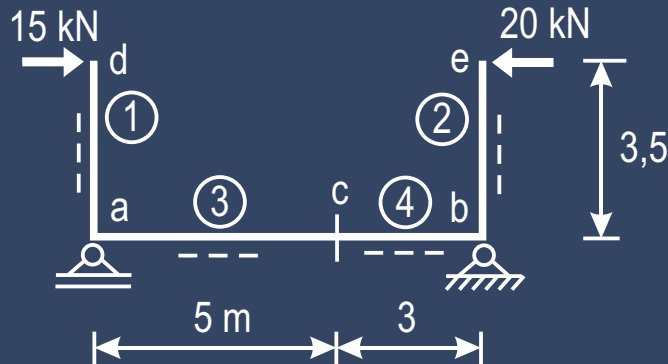
$\Delta t$  = Unterschied der Temperaturänderung zwischen den beiden Seiten.

Positiv, wenn die Zugfaserseite mehr erwärmt bzw. weniger abgekühlt wird.

Beispiel:



# FORMÄNDERUNGEN AN STATISCH BESTIMMTEN STABTRAGWERKEN



Kennwerte

$$J_1 = J_2 = 200\,000 \text{ cm}^4 ; J_3 = J_4 = 2 J_1$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Gewählt: } J_0 = J_3 ; E_0 = E_1$$

Reduzierte Stablängen

$$L'_1 = L_1 \frac{E_0 J_0}{E_1 J_1} = 3,5 \frac{1}{1} \frac{2}{1} = 7 \text{ m}$$

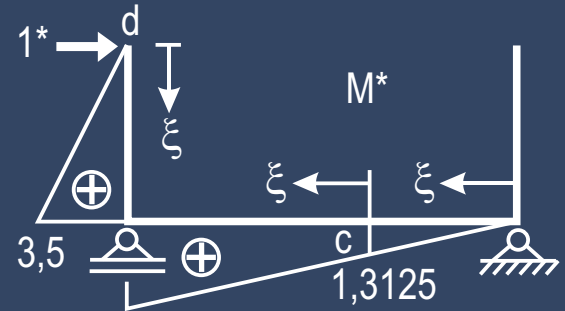
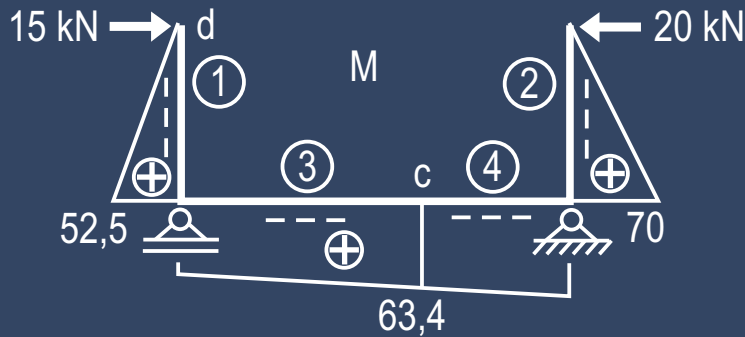
$$L'_2 = 7 \text{ m} ; L'_3 = 5 \text{ m} ; L'_4 = 3 \text{ m}$$

Horizontale Verschiebung des Punktes "d"

Durchbiegung im Punkt "c"

Gegenseitige Verschiebung der Punkte "d" und "e"

Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "d"



Horizontale Verschiebung des Punktes "d" durch Integration der Momentenfunktionen

$$E_0 J_0 1_d^* \delta_d = L_1' \int_0^1 M^* M d\xi + L_3' \int_0^1 M^* M d\xi + L_4' \int_0^1 M^* M d\xi$$

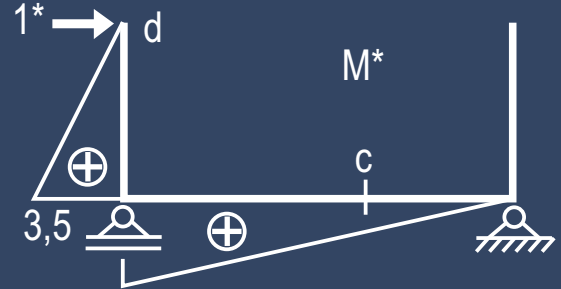
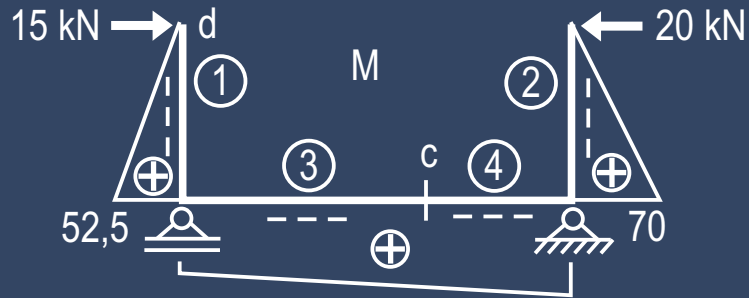
$$L_1' \int_0^1 M^* M d\xi = 7 \int_0^1 3,5 \xi \cdot 52,5 \xi d\xi = 428,8$$

$$L_3' \int_0^1 M^* M d\xi = 5 \int_0^1 (-2,1875 \xi + 3,5) (10,9 \xi + 52,5) d\xi = 687,6$$

$$L_4' \int_0^1 M^* M d\xi = 3 \int_0^1 (-1,3123 \xi + 1,3125) (6,4 \xi + 63,4) d\xi = 129$$

$$E_0 J_0 1_d^* \delta_d = 1245,4 \quad \text{daraus} \quad \delta_d = 0,0148 \text{ m}$$

Fortsetzung nächste Seite

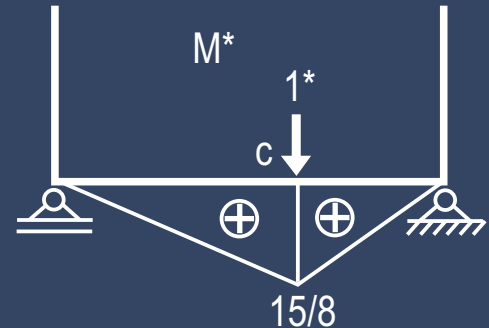
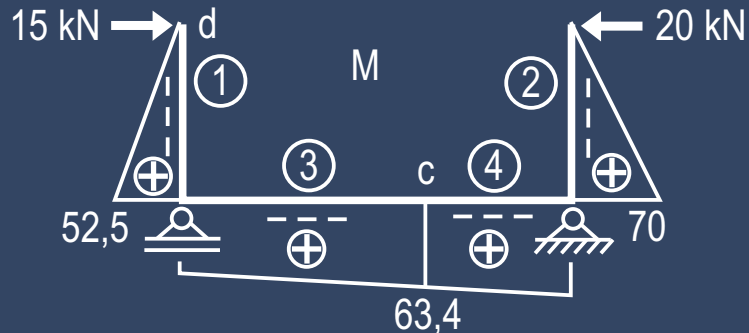


Horizontale Verschiebung des Punktes "d" mit Verwendung der Integraltafeln

$$L'_1 = 7 \text{ m} ; L'_2 = 7 \text{ m} ; L'_3 = 5 \text{ m} ; L'_4 = 3 \text{ m}$$

$$E_0 J_0 1^*_d \delta_d = 7 \frac{1}{3} 52,5 \cdot 3,5 + 8 \frac{1}{6} 3,5 (2 \cdot 52,5 + 70) = 1245,4$$

$$\delta_d = 0,0148 \text{ m}$$

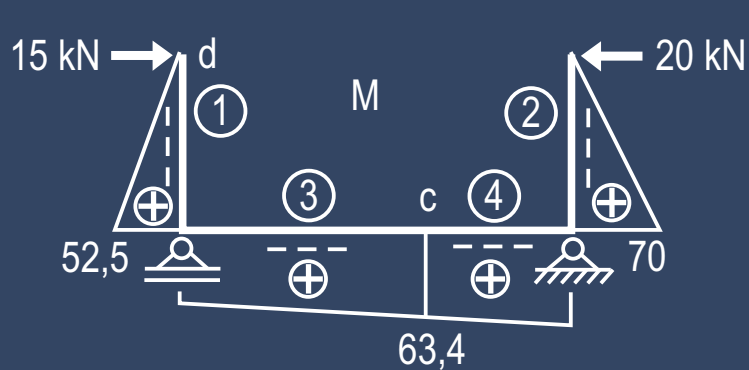


Durchbiegung im Punkt "c"

$$L'_1 = 7 \text{ m} ; L'_2 = 7 \text{ m} ; L'_3 = 5 \text{ m} ; L'_4 = 3 \text{ m}$$

$$E_0 J_0 1^*_c \delta_c = 5 \frac{1}{6} \frac{15}{8} (2 \cdot 63,4 + 52,5) + 3 \frac{1}{6} \frac{15}{8} (2 \cdot 52,5 + 63,4) = 464,7$$

$$\delta_c = 0,0055 \text{ m}$$



Gegenseitige Verschiebung der Punkte "d" und "e"

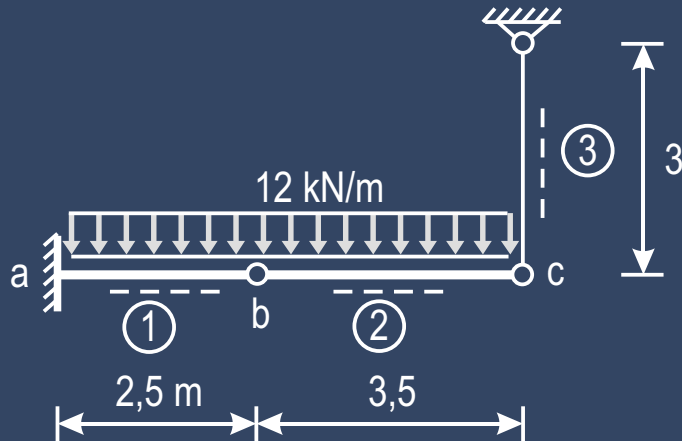
$$L'_1 = 7 \text{ m} ; L'_2 = 7 \text{ m} ; L'_3 = 5 \text{ m} ; L'_4 = 3 \text{ m}$$

$$E_0 J_0 1^*_{d,e} \delta_{d,e} = \frac{7}{3} 52,5 \cdot 3,5 + \frac{7}{3} 70 \cdot 3,5 + \frac{8}{2} 3,5 (52,5 + 70) = 2715,4$$

$$\delta_{d,e} = 0,0323 \text{ m}$$







Durchbiegung im Punkt "b"  
 Senkung des Punktes "c"  
 Gegenseitige Verdrehung der  
 Stäbe 1 und 2 im Punkt "b"  
 Gegenseitige Verdrehung der  
 Stäbe 2 und 3 im Punkt "c"

Kennwerte

$$J_1 = 400\,000 \text{ cm}^4 ; J_2 = \frac{5}{3} J_1$$

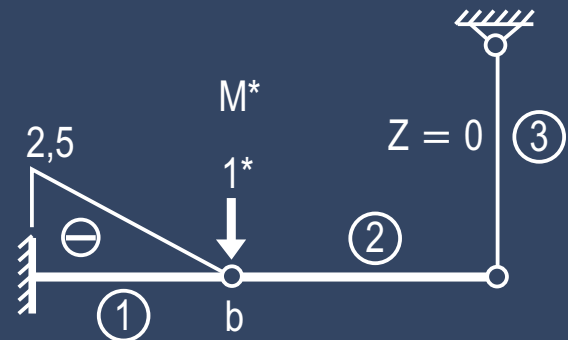
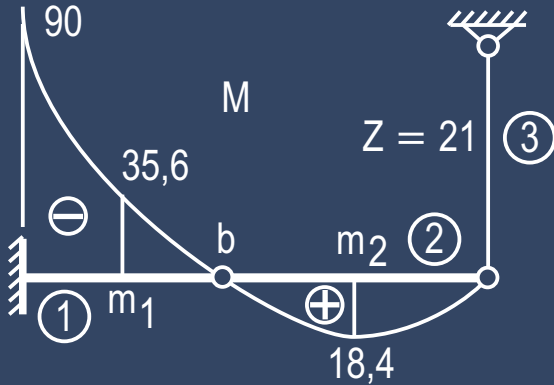
$$E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$E_3 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 ; A_3 = 5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Gewählt: } J_0 = J_1 ; E_0 = E_1$$

Reduzierte Stablängen

$$L'_1 = 2,5 \text{ m} ; L'_2 = 2,1 \text{ m} ; L''_3 = 2,4 \text{ m}^3$$

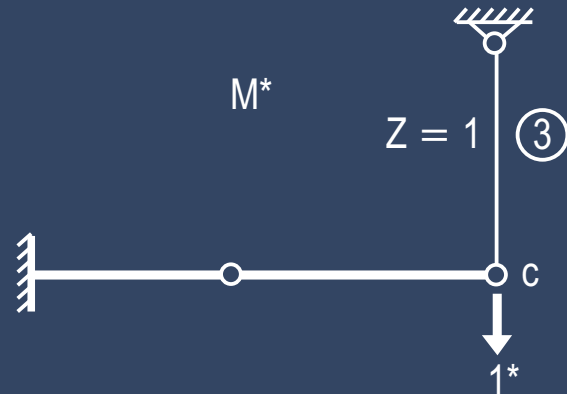
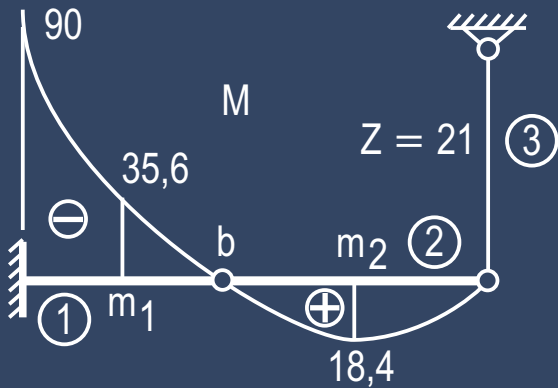


$$L'_1 = 2,5 ; L'_2 = 2,1 ; L''_3 = 2,4$$

Durchbiegung im Punkt "b"

$$E_0 J_0 1_b^* \delta_b = 2,5 \frac{1}{6} (-2,5) (-90 - 2 \cdot 35,6) = 167,9$$

$$\delta_b = 0,002 \text{ m}$$

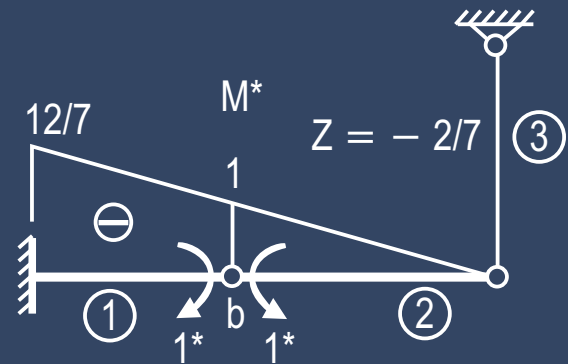
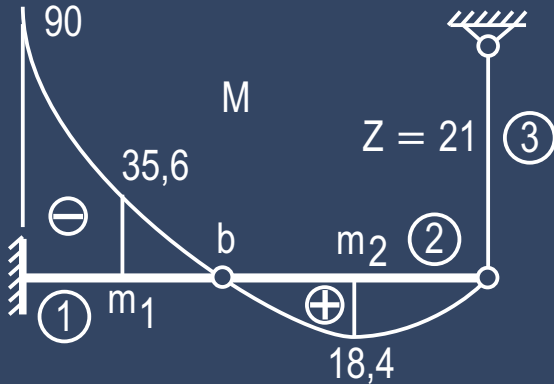


$$L'_1 = 2,5 ; L'_2 = 2,1 ; L''_3 = 2,4$$

Senkung des Punktes "c"

$$E_0 J_0 1^*_c \delta_c = 2,4 \cdot 1 \cdot 21 = 50,4$$

$$\delta_c = 0,0006 \text{ m}$$

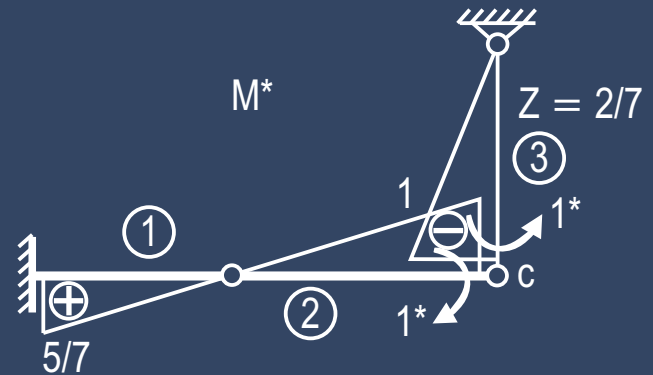
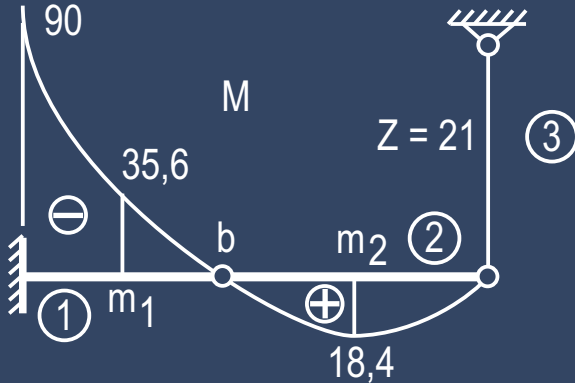


$$L'_1 = 2,5 ; L'_2 = 2,1 ; L''_3 = 2,4$$

Gegenseitige Verdrehung der Stäbe 1 und 2 im Punkt "b"

$$E_0 J_0 1^*_{b,b} \varphi_{b,b} = 2,5 \frac{1}{6} \left[ (-1)(-2 \cdot 3,5) + \left(-\frac{12}{7}\right)(-90 - 2 \cdot 35,6) \right] + \\ + 2,1 \frac{1}{3} (-1) 18,4 + \left(-\frac{2}{7}\right) 21 = 117,5$$

$$\varphi_{b,b} = 0,0014 \text{ rad} = 0,08^\circ$$

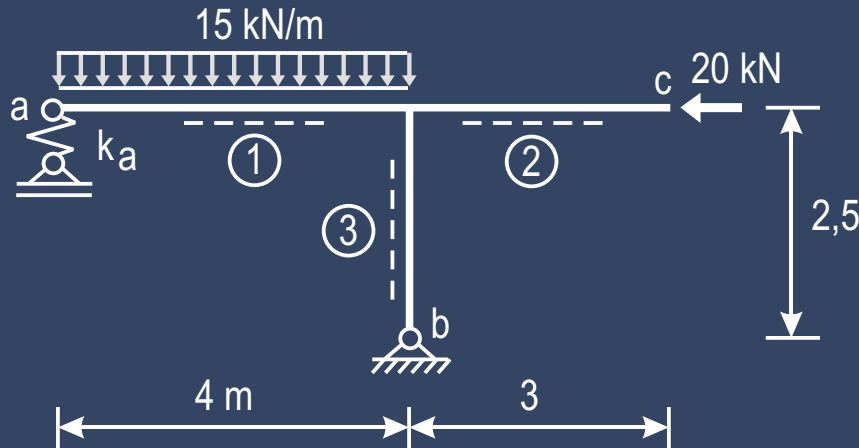


$$L'_1 = 2,5 ; L'_2 = 2,1 ; L''_3 = 2,4$$

Gegenseitige Verdrehung der Stäbe 2 und 3 im Punkt "c"

$$E_0 J_0 1^*_{c,c} \varphi_{c,c} = 2,5 \frac{1}{6} \frac{5}{7} (-90 - 2 \cdot 35,6) + \\ + 2,1 \frac{1}{3} (-1) 18,4 + 2,4 \cdot 21 \frac{2}{7} = -49,5$$

$$\varphi_{c,c} = -0,00059 \text{ rad} = -0,034^\circ$$



Kennwerte

$$J_1 = J_2 = 150\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = 0,8 J_1$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$k_a = 0,2 \text{ mm/kN}$$

$$\text{Gewählt: } J_0 = J_1 ; E_0 = E_1$$

Durchbiegung im Punkt "c"

Vertikale Verschiebung im Punkt "a"

Horizontale Verschiebung im Punkt "a"

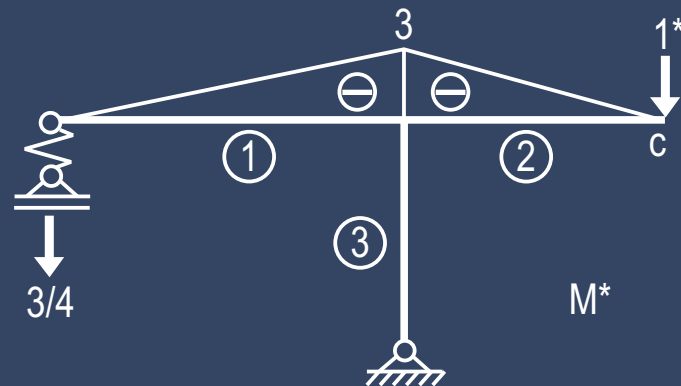
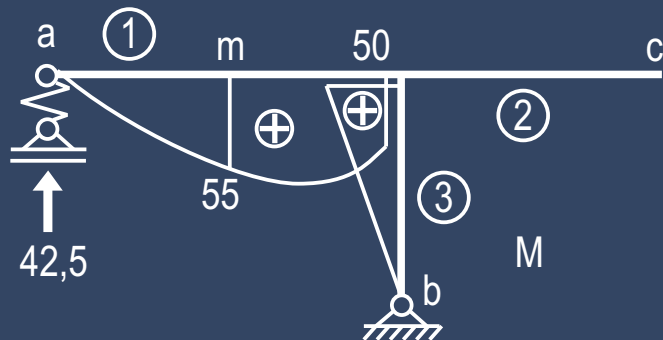
Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "a"

Verdrehung des Stabes 3 im Punkt "b"

Reduzierte Stablängen

$$L'_1 = 4 \text{ m} ; L'_2 = 3 \text{ m} ; L'_3 = 3,13 \text{ m}$$

$$E_0 J_0 k_a = 6,3 \text{ m}^3$$



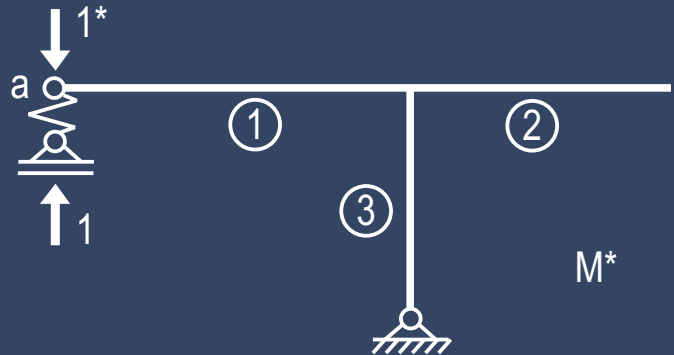
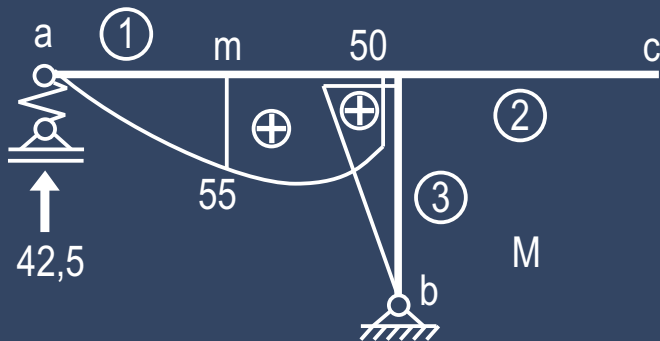
$$L'_1 = 4 ; L'_2 = 3 ; L'_3 = 3,13 ; E_0 J_0 k_a = 6,3$$

Durchbiegung im Punkt "c"

$$E_0 J_0 1_c^* \delta_c = 4 \frac{1}{6} (-3) (90 + 2 \cdot 55) - 42,5 \frac{3}{4} 6,3 = -520,8$$

$$\delta_c = -0,0165 \text{ m}$$



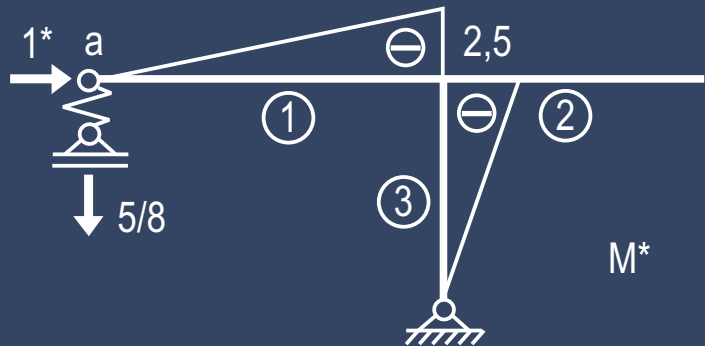
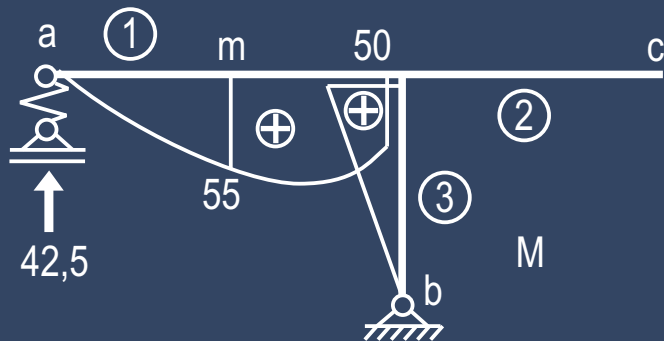


$$L'_1 = 4 ; L'_2 = 3 ; L'_3 = 3,13 ; E_0 J_0 k_a = 6,3$$

Vertikale Verschiebung im Punkt "a"

$$E_0 J_0 1_a^* \delta_a = 42,5 \cdot 1 \cdot 6,3 = 267,8$$

$$\delta_a = 0,0085 \text{ m (Das ginge noch einfacher)}$$

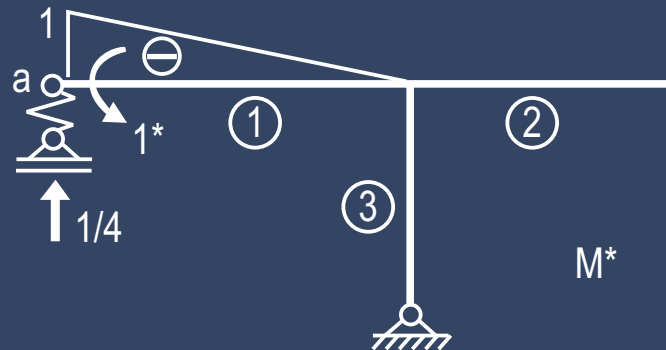
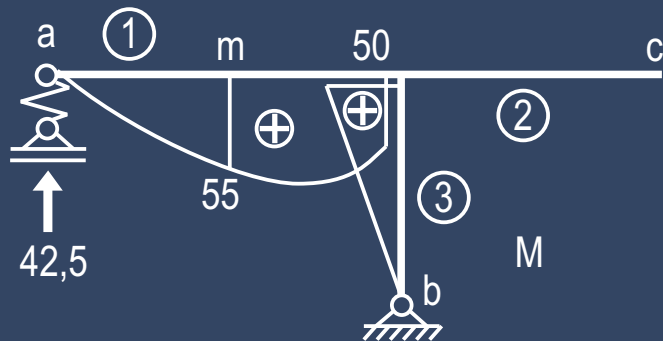


$$L'_1 = 4 ; L'_2 = 3 ; L'_3 = 3,13 ; E_0 J_0 k_a = 6,3$$

Horizontale Verschiebung im Punkt "a"

$$E_0 J_0 1_a^* \delta_a = 4 \frac{1}{6} (-2,5) (50 + 2 \cdot 55) + 3,13 \cdot 50 (-2,5) - 42,5 \frac{5}{8} 6,3 = -825,3$$

$$\delta_a = 0,0262 \text{ m}$$

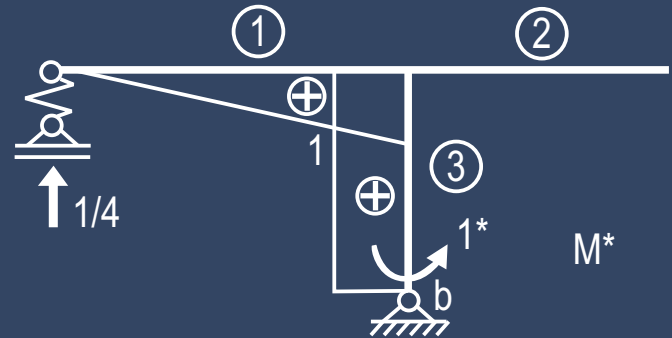
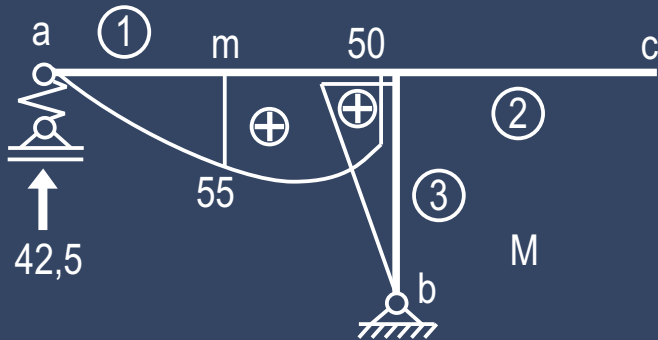


$$L'_1 = 4 ; L'_2 = 3 ; L'_3 = 3,13 ; E_0 J_0 k_a = 6,3$$

Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "a"

$$E_0 J_0 1_a^* \varphi_a = 4 \frac{1}{6} (-1) 2 \cdot 55 + 42,5 \frac{1}{4} 6,3 = -6,4$$

$$\varphi_a = -0,000203 \text{ rad} = -0,012^\circ$$

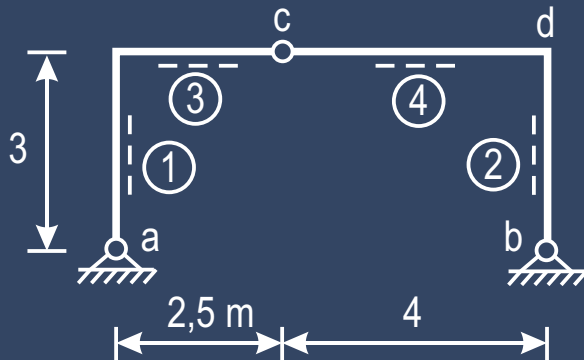


$$L'_1 = 4 ; L'_2 = 3 ; L'_3 = 3,13 ; E_0 J_0 k_a = 6,3$$

Verdrehung des Stabes 3 im Punkt "b"

$$E_0 J_0 1_b^* \varphi_b = 4 \frac{1}{6} 1 (50 + 2 \cdot 55) + 3,13 \frac{1}{2} 1 \cdot 50 + 42,5 \frac{1}{4} 6,3 = 251,9$$

$$\varphi_b = 0,008 \text{ rad} = 0,46^\circ$$



Arbeitsgleichung

$$E_0 J_0 \vartheta_1^* = L_3^{(4)} \int_0^1 N^* T_0 d\xi + L_4^{(4)} \int_0^1 N^* T_0 d\xi$$

Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "a"

Gegenseitige Verdrehung der  
Stäbe 3 und 4 im Punkt "c"

Horizontale Verschiebung des Punktes "d"

Vertikale Verschiebung des Punktes "c"

Temperatur in den Stäben 3 und 4

$h$  = Höhe der Stäbe 3 und 4

Kennwerte

$$J_1 = J_2 = 200\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = J_4 = 0,8 J_1$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Gleichmäßige Erwärmung der Stäbe 3 und 4

$$T_0 = 20^\circ \text{ C}$$

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Grad}^{-1}$$

$$\text{Gewählt: } J_0 = J_1 ; E_0 = E_1$$

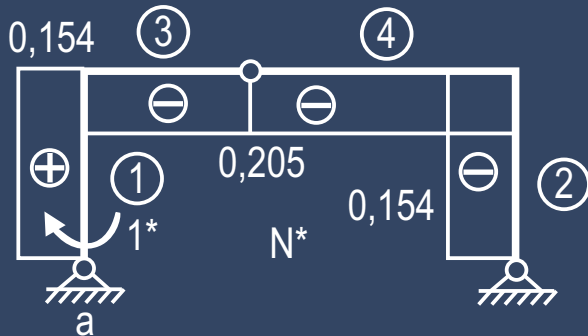
Reduzierte Stablängen

$$E_0 J_0 \alpha_t = 0,504 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Grad}^{-1}$$

$$L_3^{(4)} = L_3 E_0 J_0 \alpha_t = 1,26 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{Grad}^{-1}$$

$$L_4^{(4)} = L_4 E_0 J_0 \alpha_t = 2,02 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{Grad}^{-1}$$





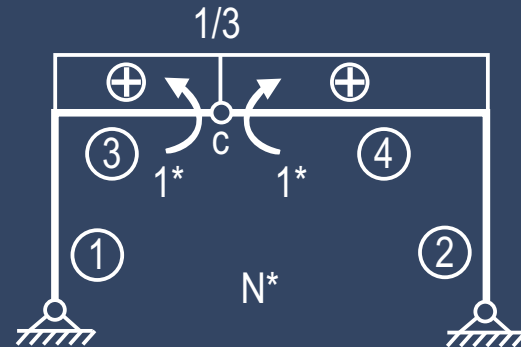
$$L_3^{(4)} = 1,26 ; L_4^{(4)} = 2,02$$

Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "a"

$$E_0 J_0 1_a^* \varphi_a = 1,26 (-0,205) 20 \\ + 2,02 (-0,205) 20$$

$$E_0 J_0 1_a^* \varphi_a = -13,5$$

$$\varphi_a = -0,00032 \text{ rad} = -0,018^\circ$$

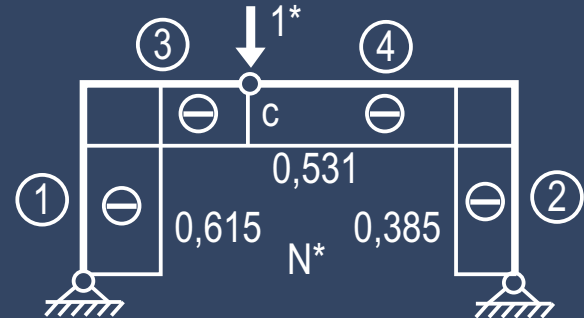
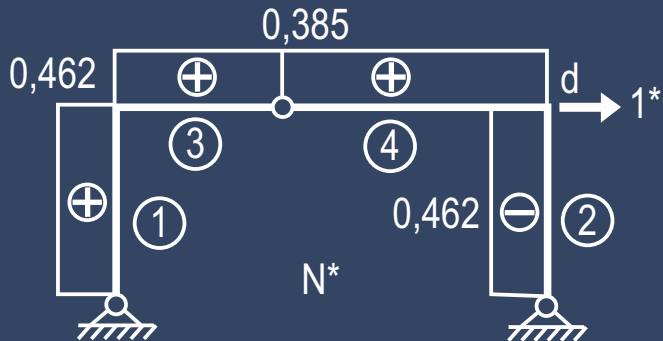


Gegenseitige Verdrehung der  
Stäbe 3 und 4 im Punkt "c"

$$E_0 J_0 1_c^* \varphi_{c,c} = 1,26 \frac{1}{3} 20 \\ + 2,02 \frac{1}{3} 20$$

$$E_0 J_0 1_c^* \varphi_{c,c} = 21,9$$

$$\varphi_{c,c} = 0,00052 \text{ rad} = 0,03^\circ$$



$$L_3^{(4)} = 1,26 ; L_4^{(4)} = 2,02$$

Horizontale Verschiebung des Punktes "d"

$$E_0 J_0 1_d^* \delta_d = 1,26 \cdot 0,385 \cdot 20 \\ + 2,02 \cdot 0,385 \cdot 20$$

$$E_0 J_0 1_d^* \delta_d = 25,3$$

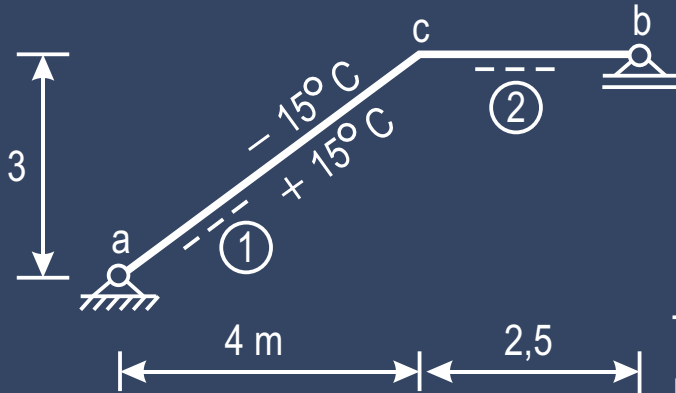
$$\delta_d = 0,0006 \text{ m}$$

Vertikale Verschiebung des Punktes "c"

$$E_0 J_0 1_c^* \delta_c = 1,26 (-0,513) 20 \\ + 2,02 (-0,513) 20$$

$$E_0 J_0 1_c^* \delta_c = -33,7$$

$$\delta_c = -0,000802 \text{ m}$$



Kennwerte

Querschnitt des Stabes 1: 30/50 cm

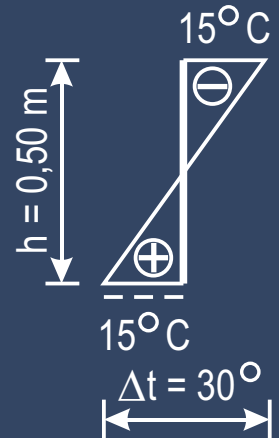
$$J_1 = 312\,500 \text{ cm}^4 ; J_2 = 0,6 J_1$$

$$E_1 = E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Temperaturänderung im Stab 1

Erwärmung innen um  $+15^\circ \text{C}$

Abkühlung außen um  $-15^\circ \text{C}$



Arbeitsgleichung

$$E_0 J_0 \varphi_i^* = L_1^{(4)} \int_0^1 M^* \frac{\Delta t}{h} d\xi$$

Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "a"

Verdrehung des Stabes 2 im Punkt "b"

Horizontale Verschiebung des Punktes "b"

Durchbiegung im Punkt "c"

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Grad}^{-1}$$

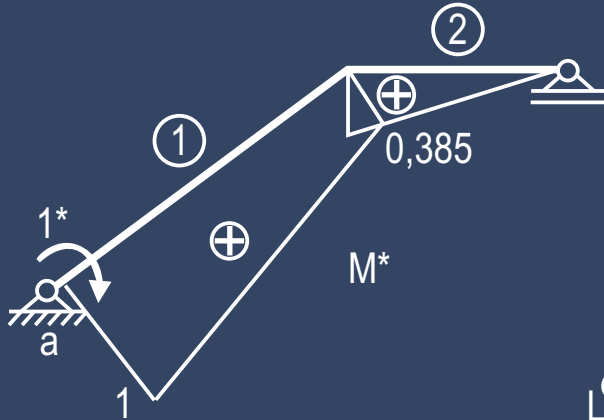
$$\text{Gewählt: } J_0 = J_1 ; E_0 = E_1$$

Reduzierte Stablänge

$$E_0 J_0 \alpha_t = 1,125 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Grad}^{-1}$$

$$L_1^{(4)} = L_1 E_0 J_0 \alpha_t = 5,63 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{Grad}^{-1}$$





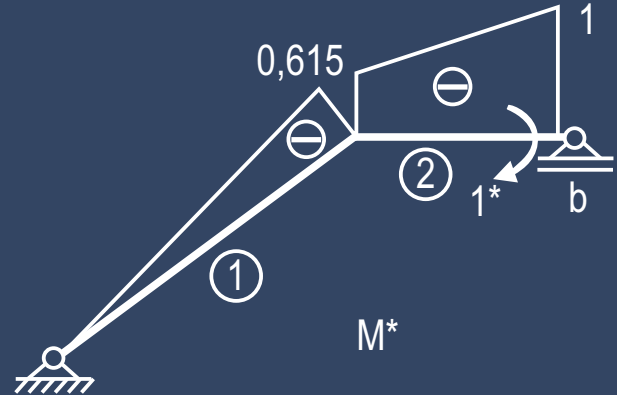
$$L_1^{(4)} = 5,63$$

Verdrehung des Stabes 1 im Punkt "a"

$$E_0 J_0 1_a^* \varphi_a = 5,63 \frac{1}{2} (1 + 0,385) \frac{30}{0,5}$$

$$E_0 J_0 1_a^* \varphi_a = 233,9$$

$$\varphi_a = 0,0025 \text{ rad} = 0,14^\circ$$

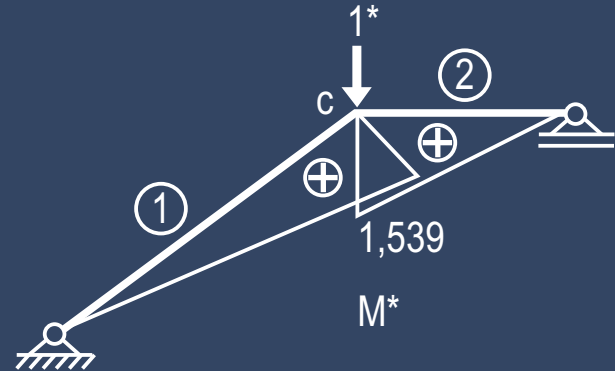
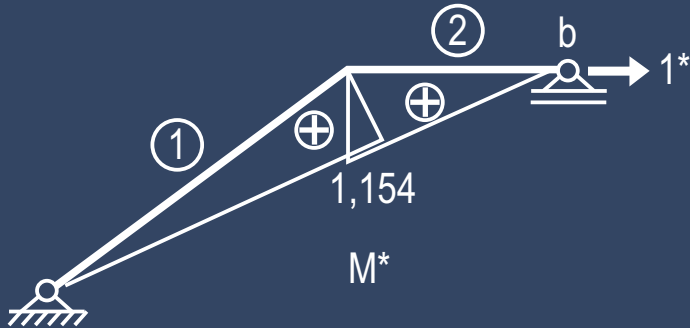


Verdrehung des Stabes 2 im Punkt "b"

$$E_0 J_0 1_b^* \varphi_b = 5,63 \frac{1}{2} (-0,615) \frac{30}{0,5}$$

$$E_0 J_0 1_b^* \varphi_b = -103,9$$

$$\varphi_b = -0,0011 \text{ rad} = -0,064^\circ$$



$$L_1^{(4)} = 5,63$$

Horizontale Verschiebung des Punktes "b"

$$E_0 J_0 1_b^* \delta_b = 5,63 \frac{1}{2} 1,154 \frac{30}{0,5}$$

$$E_0 J_0 1_b^* \delta_b = 194,9$$

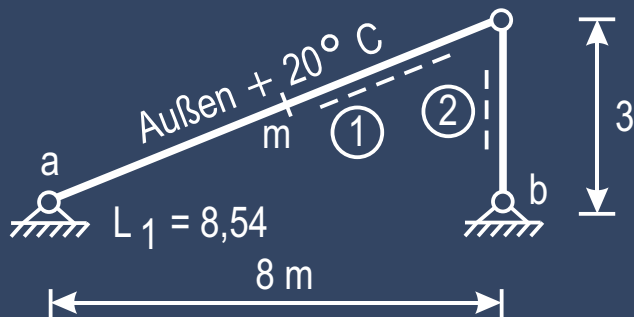
$$\delta_b = 0,00208 \text{ m}$$

Durchbiegung im Punkt "c"

$$E_0 J_0 1_c^* \delta_c = 5,63 \frac{1}{2} 1,539 \frac{30}{0,5}$$

$$E_0 J_0 1_c^* \delta_c = 259,9$$

$$\delta_c = 0,00277 \text{ m}$$



Vertikale Verschiebung des Punktes "m"  
 Verdrehung des Stabes 2 im Punkt "b"

Arbeitsgleichung

$$E_0 J_0 1_a^* \delta_a = L_1^{(4)} \left[ \int_0^1 M^* \frac{\Delta t}{h} d\xi + \int_0^1 N^* T_0 d\xi \right]$$

Reduzierte Stablänge

$$E_0 J_0 \alpha_t = 1,81 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Grad}^{-1}$$

$$L_1^{(4)} = L_1 E_0 J_0 \alpha_t = 15,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{Grad}^{-1}$$

Zerlegung eines beliebig geradlinigen Temperaturverlaufs  $t_1, t_2$  über die Stabhöhe  $h$

$$\begin{matrix} h \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} t_2 \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} t_1 \\ \text{---} \end{matrix} = \begin{matrix} t_3 \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} t_3 \\ \text{---} \end{matrix} + \begin{matrix} T_0 \\ \text{---} \end{matrix}$$

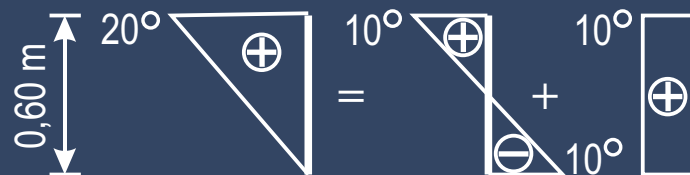
Kennwerte

Querschnitt des Stabes 1: 40/60

$$J_1 = 720\,000 \text{ cm}^4 ; J_2 = 0,6 J_1$$

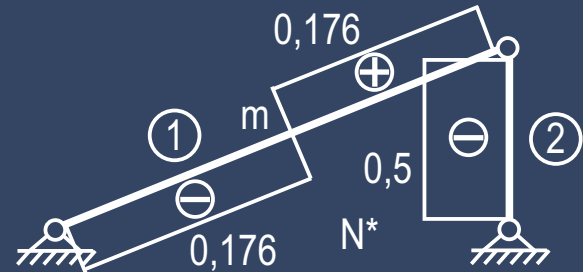
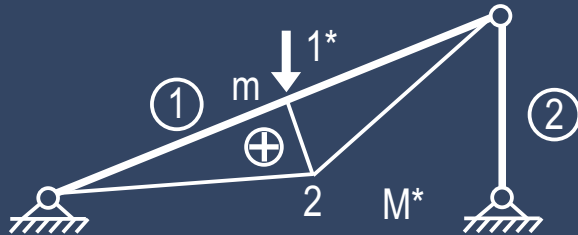
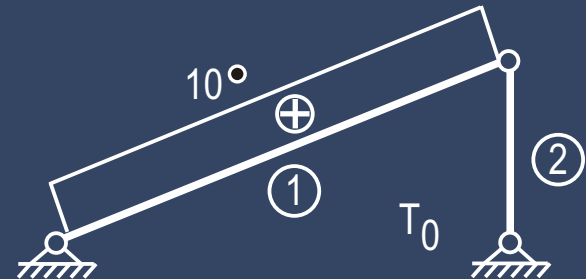
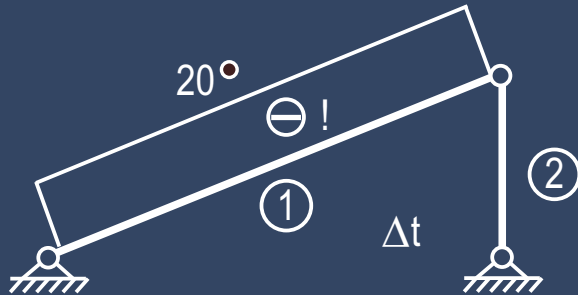
$$E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Erwärmung Stab 1: außen um  $+20^\circ \text{C}$



$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Grad}^{-1} \quad \Delta t = -20^\circ$$

Gewählt:  $J_0 = J_1 ; E_0 = E_1$

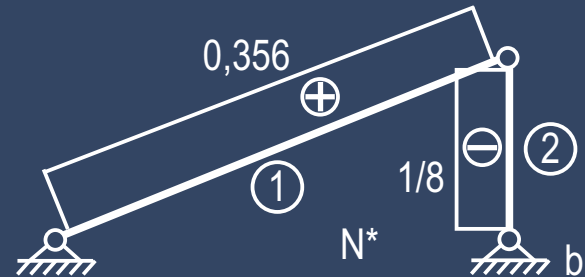
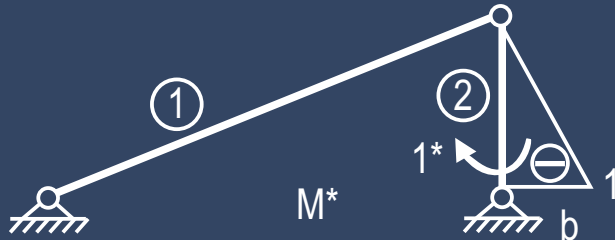
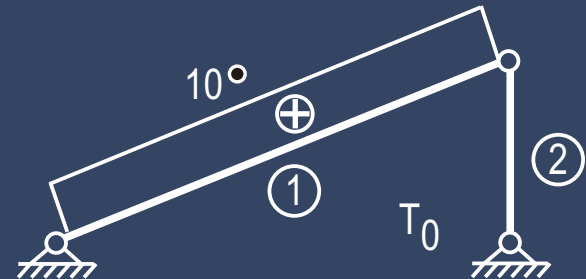
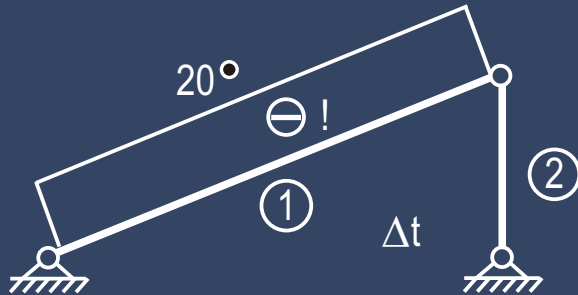


Vertikale Verschiebung des Punktes "m"

$$L_1^{(4)} = 15,5$$

$$E_0 J_0 1_m^* \delta_m = 15,5 \left[ \frac{1}{2} 2 \frac{(-20)}{0,6} + \frac{1}{2} 10 (-0,176) + \frac{1}{2} 10 \cdot 0,176 \right] = -516,7$$

$$\delta_m = -0,0034 \text{ m}$$

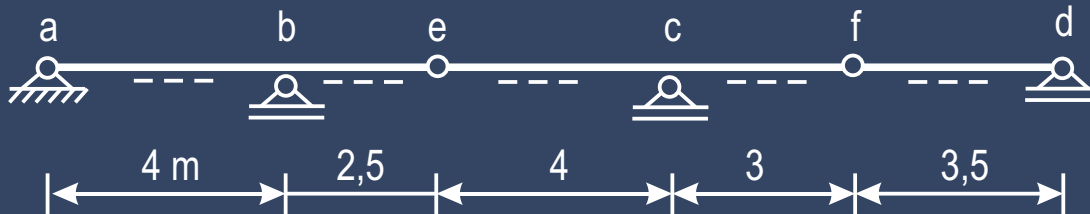


Verdrehung des Stabes 2 im Punkt "b"

$$L_1^{(4)} = 15,5$$

$$E_0 J_0 1_b^* \varphi_b = 15,5 (0 + 0,356 \cdot 10) = 55,2$$

$$\varphi_b = 0,000365 \text{ rad} = 0,021^\circ$$



Kennwerte

Stützensenkung im Punkt "b" um  $\delta_b = 0,04$  m nach unten

Arbeitsgleichung

zur Ermittlung der Formänderung im Punkt "i"

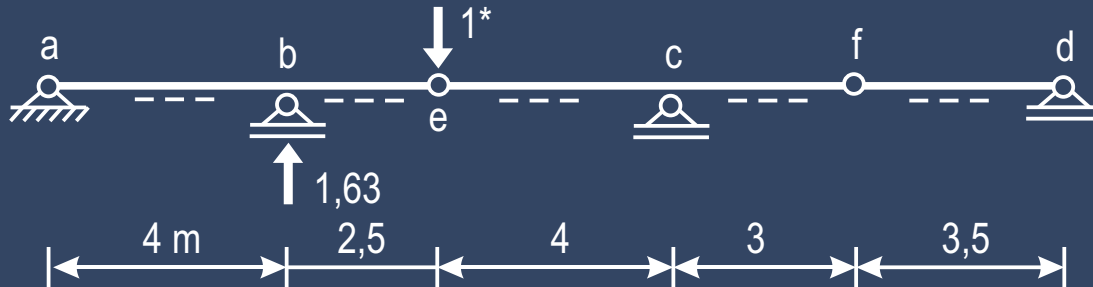
$$1 \cdot \delta_i = - C_b^* \delta_b$$

Durchbiegung im Punkt "e"

Durchbiegung im Punkt "f"

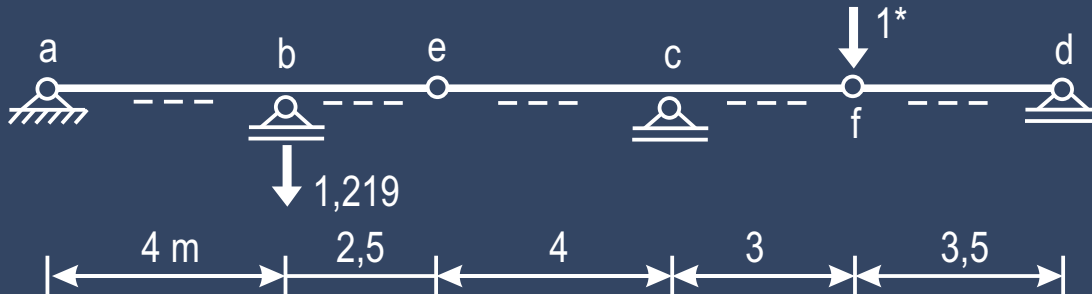
Stabverdrehung im Punkt "d"

Gegenseitige Verdrehung der Stäbe im Punkt "e"



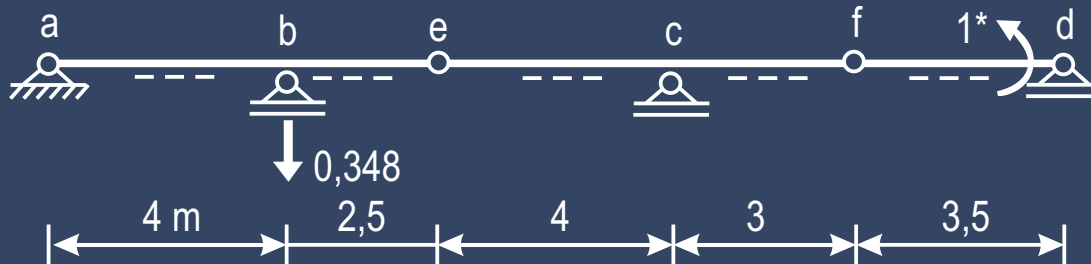
Durchbiegung im Punkt "e"

$$\delta_e = - (-1,63 \cdot 0,04) = 0,065 \text{ m}$$



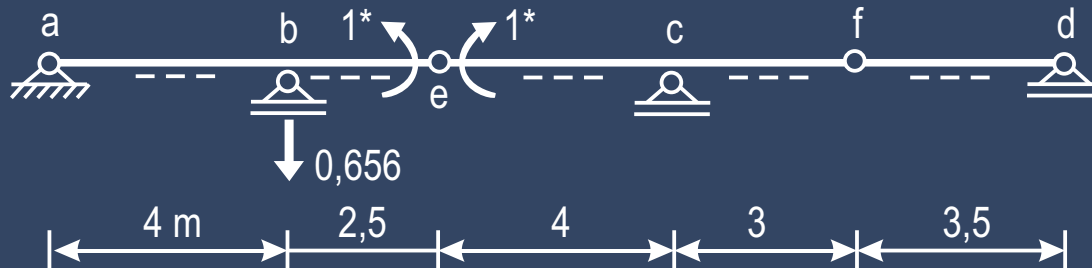
Durchbiegung im Punkt "f"

$$\delta_f = - 1,219 \cdot 0,04 = - 0,049 \text{ m}$$



Stabverdrehung im Punkt "d"

$$\varphi_d = -0,348 \cdot 0,04 = -0,0139 \text{ rad} = -0,798^\circ$$



Gegenseitige Verdrehung der Stäbe im Punkt "e"

$$\varphi_{e,e} = -0,656 \cdot 0,04 = -0,0262 \text{ rad} = -1,5^\circ$$