Diethard Thieme

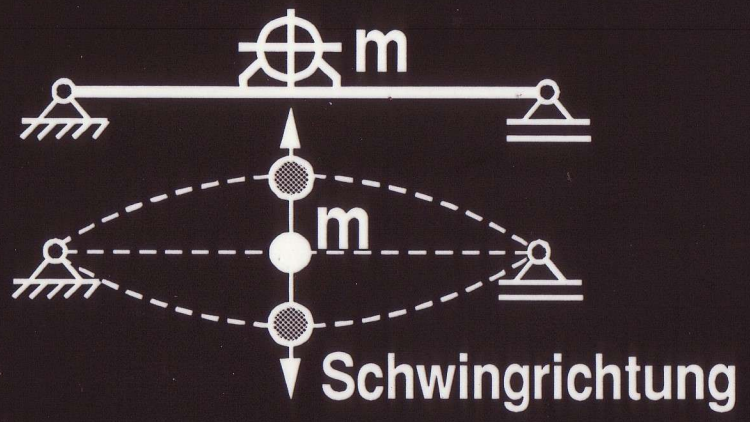
Skripte
zur Baumechanik

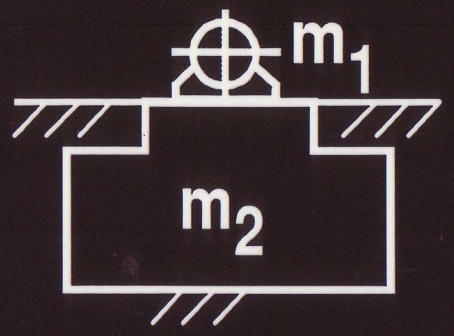
Baudynamik

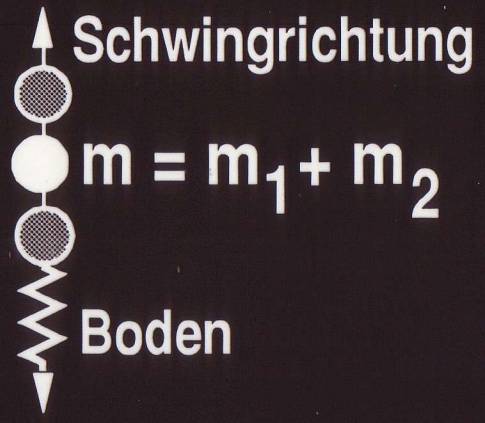
BM 30

2 Schwingungen mit konzentrierten Massen

2.1 Harmonische Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad



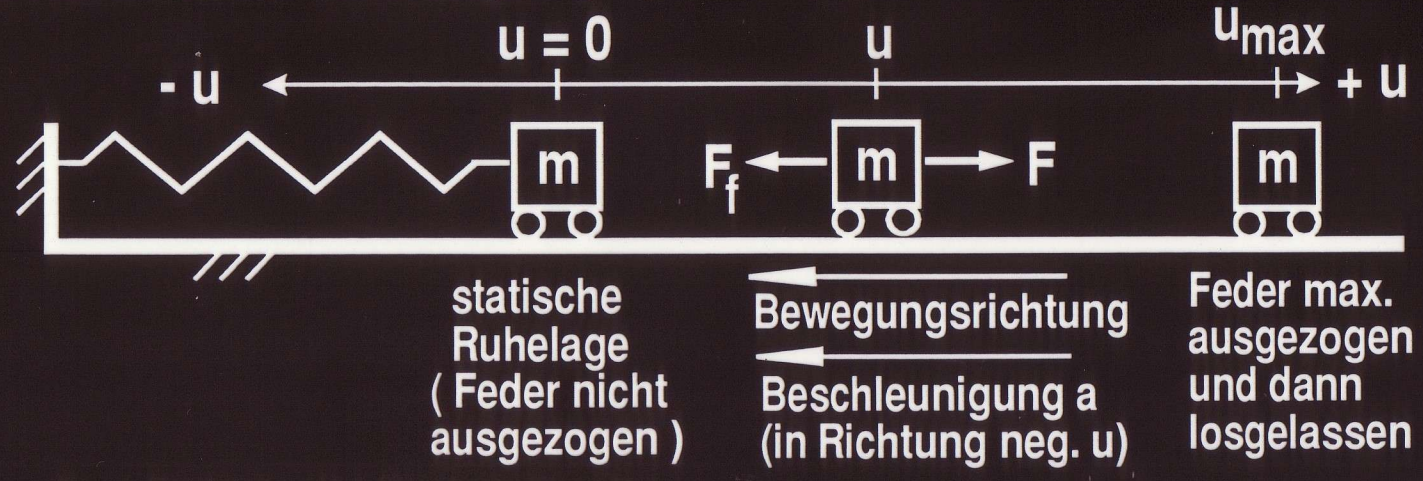




2.1.1 Ungedämpfte freie Schwingungen

2.1.1.1 Ableitung der Differentialgleichung

Fall 1 : Horizontale Schwingung



F_f = Federkraft (Rückstellkraft)

F = Trägheitskraft nach d´Alembert (entgegen *a*)

$$\overleftarrow{\sum} K = 0$$

$$F_f - F = 0$$

c = Federkonstante = $\dfrac{F_{statisch}}{u_{infolge\ F_{statisch}}}$ z.B. in $\dfrac{kN}{m}$

m = Masse

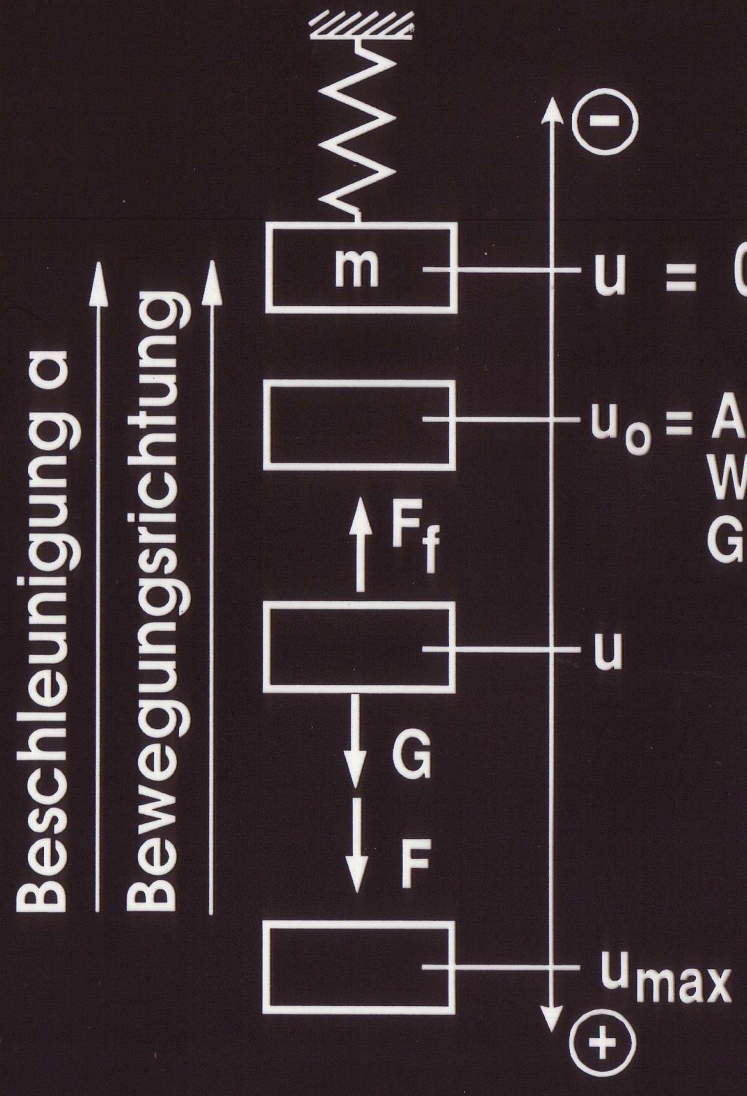
$$c\,u - m\,a = 0$$

$$a = -\frac{d^2u}{dt^2} = -\ddot{u}$$ (Beschleunigung in Richtung negatives *u*)

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{c}{m}u = 0}$$

Differentialgleichung der horizontalen Schwingung

Fall 2 : Lotrechte Schwingung



$u = 0$, Ausgangslage

u_o = Auslenkung aus rein statischer Wirkung (statische Ruhelage, Gleichgewicht)

u

Feder aus der statischen Ruhelage heraus maximal ausgezogen und dann losgelassen

$$\uparrow \Sigma K = 0$$

$$F_f - F - G = 0$$

$$c\,(u_o + u) - m\,a - m\,g = 0$$

Bei u_o ist statisches Gleichgewicht aus der Wirkung von $G = m\,g$ und $F_f = c\,u_o$, d.h. $m\,g - c\,u_o = 0$

Es bleibt

$c\,u - m\,a = 0$ (Beschleunigung in Richtung negatives u: $a = -\ddot{u}$)

$$c\,u - m\,(-\ddot{u}) = 0$$

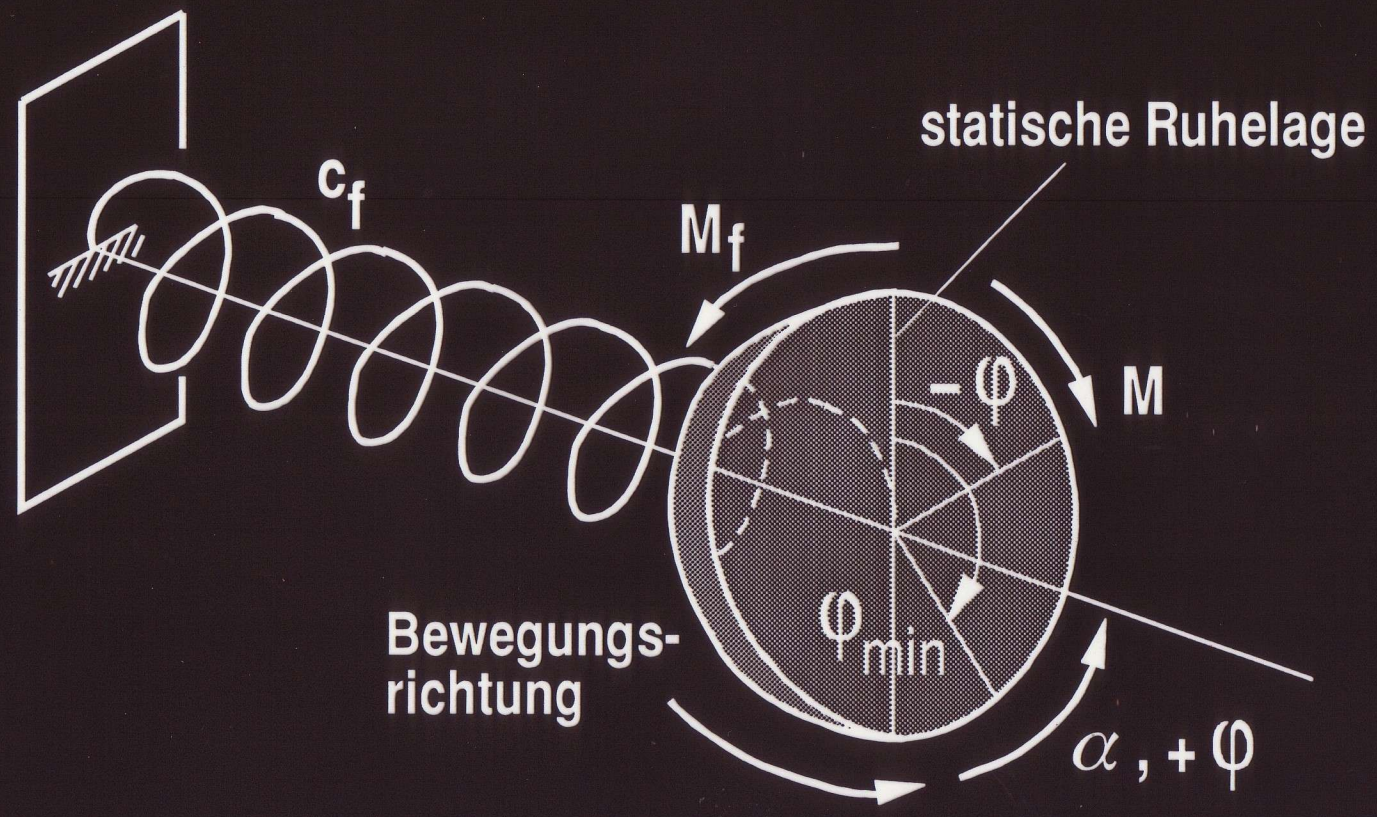
Daraus die Differentialgleichung der lotrechten Schwingung

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{c}{m}\,u = 0}$$

wie "Horizontale Schwingung"

Wichtiger Hinweise: Die Verschiebung u wird von der <u>statischen Ruhelage</u> aus gemessen !

Fall 3 : Drehschwingung



Zur Erinnerung :
Massenträgheitsmoment J

$$J = \int r^2 \, dm$$

Bis φ_{min} aus der statischen Ruhelage verdreht und dann losgelassen. Untersuchung des Zustandes bei $-\varphi$

M_f = Torsionsmoment der Feder (Rückstellmoment)

M = Moment aus der Trägheitswirkung nach d´Alembert

c_f = Drehfederkonstante = $\dfrac{M_{statisch}}{\varphi_{infolge\ M_{statisch}}}$ z.B. in kNm

α = Winkelbeschleunigung

$$\circlearrowleft \sum M = 0 \longrightarrow M_f - M = 0$$

$$c_\varphi(-\varphi) - J\alpha = 0$$

$$\alpha = d^2\varphi / dt^2 = \ddot{\varphi}$$

Differentialgleichung der Drehschwingung

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{c_\varphi}{J}\varphi = 0}$$

prinzipiell wie Fall 1 und Fall 2

2.1.1.2 Lösung der Differentialgleichung (DGL)

DGL der freien ungedämpften linearen Schwingung

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \frac{c}{m} u(t) = 0}$$

homogene lineare gewöhnliche DGL 2. Ordnung

homogen: weil die rechte Seite Null ist

gewöhnlich: nur Ableitungen nach einer Variablen, hier: t

linear: die Funktion u (t) und ihre Ableitungen treten linear auf

Bsp. für eine nichtlineare DGL: $\ddot{u}^2 + u^2 = 0$

2. Ordnung: weil die höchste Ableitung die zweite ist

Einführung einer neuen Konstanten ω zur Abkürzung
(anschauliche mechanische Deutung von ω s. Abschn. 2.1.1.3) :

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \longrightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = 0} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \longrightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = 0} \quad (1)$$

Die folgenden speziellen Funktionen sind Lösungen der DGL (1):

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= C_1 \sin(\omega t) \\ u_2(t) &= C_2 \cos(\omega t) \end{aligned}\right\}$$

Kontrolle durch Einsetzen in die DGL (1)

Diese beiden Funktionen sind voneinander unabhängig und bilden die allgemeine Lösung der DGL (1)

$$u(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (2)$$

Zur Umformung ersetzen wir die beiden Konstanten C_1 und C_2 durch zwei neue Konstanten A und α :

$$C_1 = A \cos\alpha \quad \text{und} \quad C_2 = A \sin\alpha$$

Dann wird die Lösung (2) zu

$$u(t) = A \left[\cos\alpha * \sin(\omega t) + \sin\alpha * \cos(\omega t)\right] \quad (3)$$

$$u(t) = A\left[\cos\alpha * \sin(\omega t) + \sin\alpha * \cos(\omega t)\right] \quad (3)$$

Zur Umformung von (3) Verwendung des folgenden Additionstheorems für trigonometrische Funktionen :

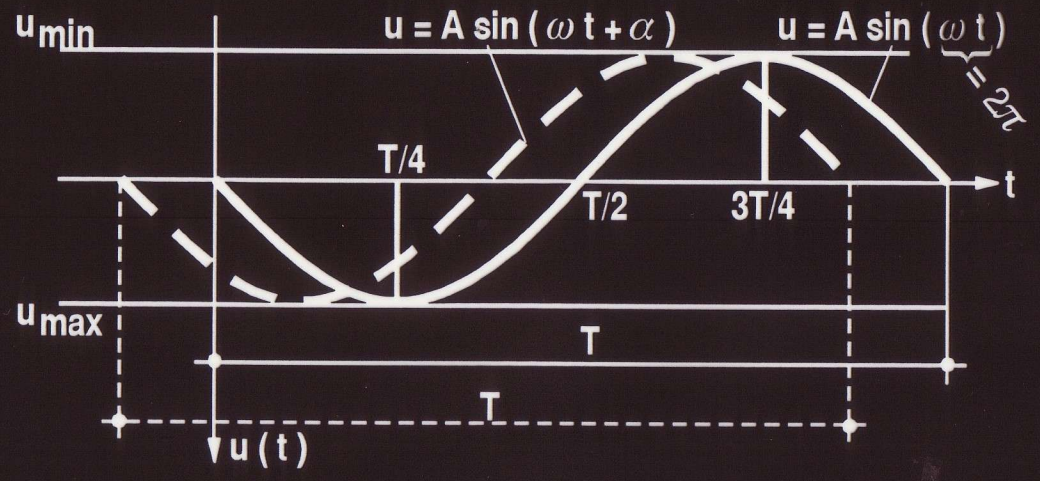
$$\sin(x + y) = \cos x * \sin y + \sin x * \cos y$$

Mit ($x = \alpha$ und $y = \omega t$)

wird aus der Lösung (3): $\boxed{u(t) = A \sin(\omega t + \alpha)}$ (4)

A, α = Konstanten, die aus Rand- und Übergangsbedingungen zu bestimmen sind (siehe unten)

Grafische Darstellung der Lösung (4)



T = Zeitdauer einer Vollschwingung

α = Nullphasenwinkel, gibt lediglich die Verschiebung einer Schwingung $u = A \sin(\omega t + \alpha)$ im Vergleich zu $u = A \sin(\omega t)$ an

Aus der Zeichnung: $\omega t = 2\pi$ mit $t = T$ für eine Vollschwingung

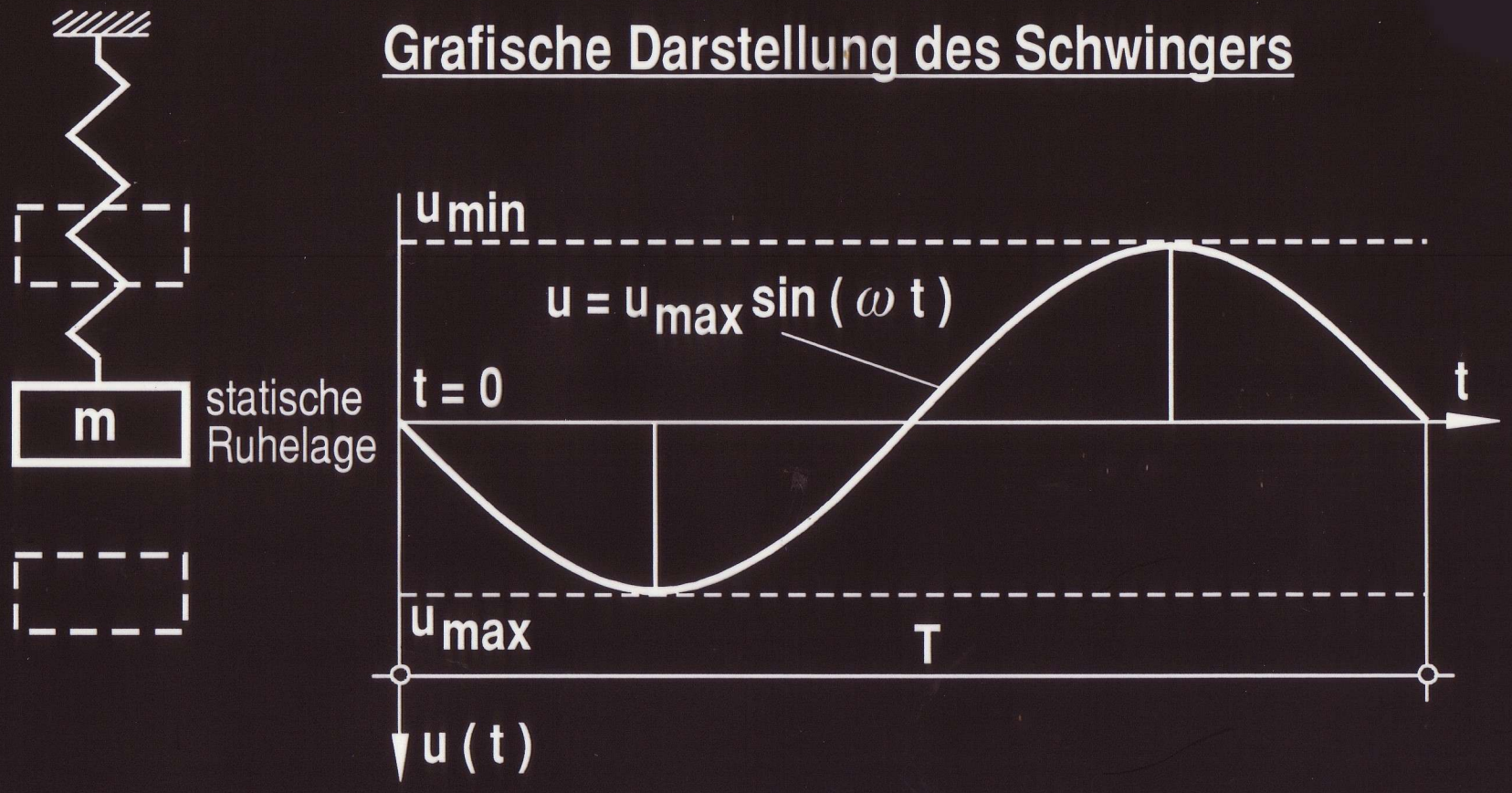
$\omega = \text{konst} = \varphi / t = 2\pi / T$ (als Winkelgeschwindigkeit einer gleichmäßigen Kreisbewegung deutbar)

Genauere Erklärung für ω siehe Abschnitt 2.1.1.3.

Bestimmung der Konstanten A in $u = A \sin(\omega t)$

$$t = T/4,\ u = u_{max} \rightarrow u_{max} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,\frac{T}{4}\right) \rightarrow u_{max} = A$$

Lösung: $\boxed{u(t) = u_{max} \sin(\omega t)}$

Harmonische Schwingung, die zur Zeit $t = 0$ durch die statische Ruhelage geht.

Grafische Darstellung des Schwingers