Diethard Thieme

Skripte
zur Baumechanik

Kinematik

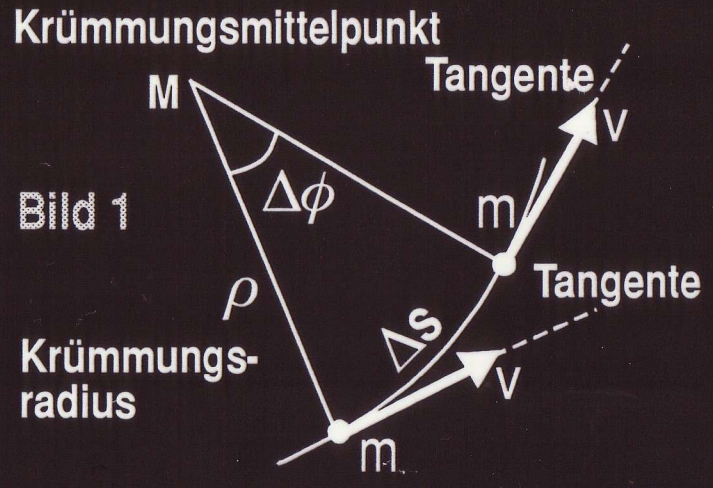
BM 25

2 Bewegung auf krummliniger Bahn

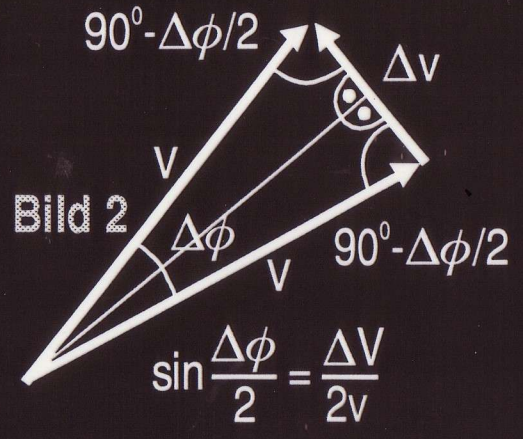
2.1 Normal- und Tangentialbeschleunigung

a. Normalbeschleunigung

<u>Voraussetzung:</u> Die Geschwindigkeit v des Massenpunktes soll konstant bleiben (gleichförmige Bewegung)



v ist immer tangential gerichtet



$$\sin\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\Delta V}{2v}$$

Für kleine Winkel gilt
$\sin\alpha \approx \alpha$

aus Bild 2: $\Delta v = v\,\Delta\phi$ (1)

aus Bild 1: $\Delta\phi = \Delta s / \rho$ eingesetzt in (1)

$$\Delta v = v\,\Delta s / \rho \quad \Big| \cdot 1/\Delta t$$

$$\Delta v = v\,\Delta s / \rho \quad \Big| \cdot 1/\Delta t$$

$\Delta v \perp$ auf $v \rightarrow$ (Bild 2)

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\rho}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\lim \Delta t \rightarrow 0$$

gerichtet nach M $\left\{ \frac{dv}{dt} = \frac{v}{\rho}\, v \right.$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

a_n = Normal- oder Zentripetalbeschleunigung, gerichtet zum Krümmungsmittelpunkt M

Bei der Bewegung auf krummliniger Bahn gibt es selbst bei konstanter Geschwindigkeit v eine Beschleunigung in Richtung Krümmungsmittelpunkt.

b. Tangentialbeschleunigung

$a_t = dv / dt$ (zeigt in Richtung Tangente,
d.h. in Richtung Geschwindigkeit v)

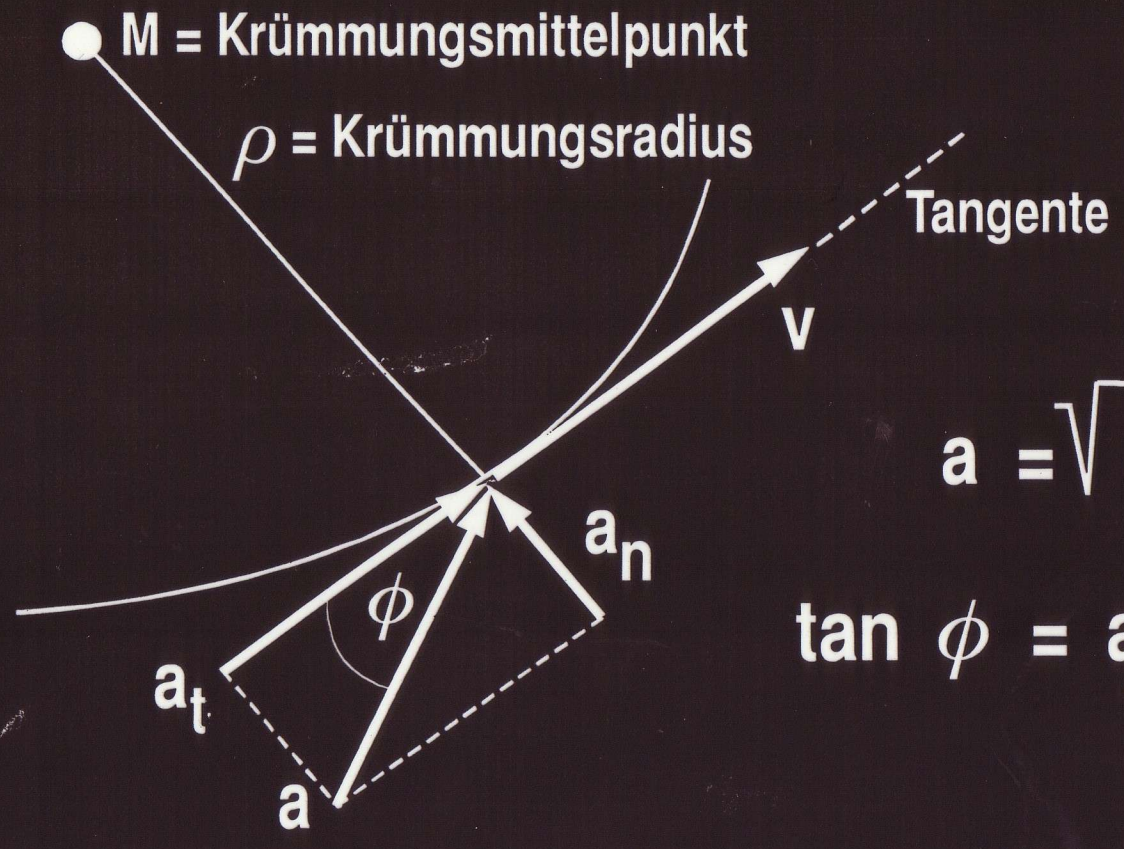
c. Grenzfall: gerade Bahn

$a_n = 0$ (wegen $\rho \rightarrow \infty$)

$a_t = dv / dt = a$

Bei gerader Bahn ist die Tangentialgeschleunigung identisch mit der bekannten Beschleunigung a .

d. Gesamtbeschleunigung

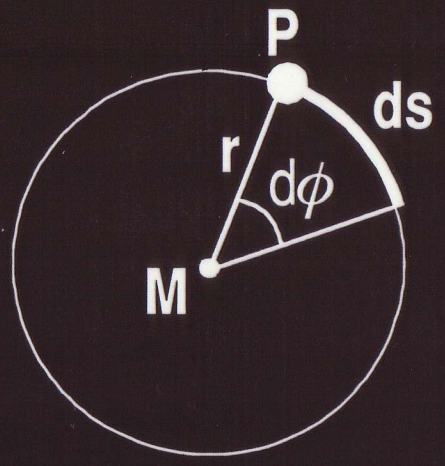


$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$\tan \phi = a_n / a_t$$

Die Richtung der Gesamtbeschleunigung und der Geschwindigkeit fallen <u>nicht</u> zusammen. Sie bilden den Winkel ϕ miteinander. Die Geschwindigkeit v ist immer tangential gerichtet.

2.2 Bewegung auf der Kreisbahn
2.2.1 Allgemeine Darstellung
a. Winkelgeschwindigkeit ω



Weg $ds = r\, d\phi$ (vgl. $U = r * 2\pi$)

Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi / dt$

Bahngeschwindigkeit

$$\underbrace{v = ds / dt = r}\, * d\phi / dt = r\,\omega \rightarrow \boxed{\omega = v / r}$$

$$\frac{v}{r} = \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{r}\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}}_{\text{nach Ableiten nach } t}$$

b. Winkelbeschleunigung α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r}a_t$$

c. Normal- und Tangentialbeschleunigung

Aus $a_n = v^2/\rho$ wird mit $\rho = r$ (r für Kreis)

$$a_n = v^2/r = r\,\omega^2 = v\,\omega$$

└ mit $\omega = v/r$

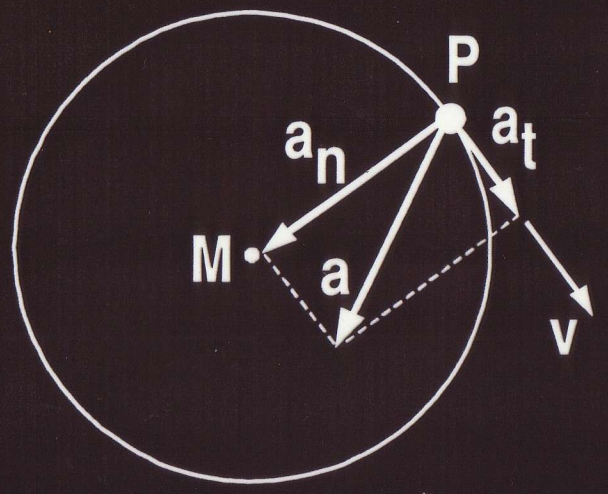
a_n = Normal- oder Zentripetalbeschleung., gerichtet nach M

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha$$

$dv = r\omega$

a_t = Tangentialbeschleunigung in Richtung Bahngeschwindigkeit v

d. Gesamtbeschleunigung



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{r^2 \alpha^2 + r^2 \omega^4}$$

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

2.2.2 Gleichförmige Kreisbewegung (ω = konst)

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \phi / t = \text{konst}$

(ϕ im Bogenmaß z.B. 0,0123 * π)

Bahngeschwindigkeit $v = r\,\omega = r\,\phi / t = \text{konst}$

Winkelbeschleunigung $\alpha = d\omega / dt = 0$

Tangentialbeschleunigung $a_t = dv / dt = 0$

Normalbeschleunigung

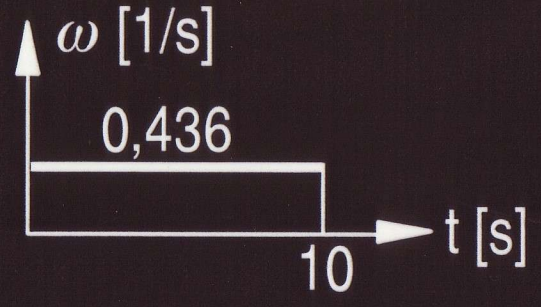
$$a_n = v^2 / r = r\,\omega^2 = v\,\omega = r\left(\frac{\phi}{t}\right)^2 = \text{konst}$$

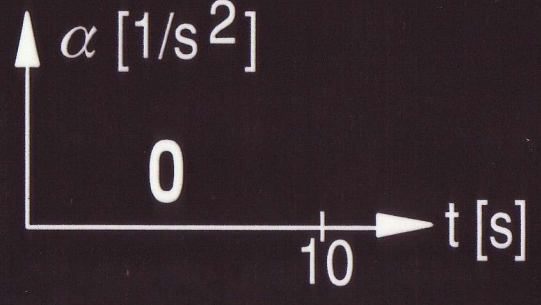
Beispiel: Eine Punktmasse führt eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Radius $r = 5\ m$ aus.
Nach 10 s hat sie einen Winkel von $\phi = 250^0$ zurückgelegt.

Gesucht

a. Bewegungsgleichungen und Diagramme
$\alpha(t)$, $\omega(t)$, $\phi(t)$, $v(t)$, $a_t(t)$ und $a_n(t)$

b. Wie groß ist der zurückgelegte Weg auf dem Kreisbogen ?





$$\frac{\hat{\phi}}{\phi^0} = \frac{6{,}28}{360^0}$$

$$\hat{\phi} = \frac{2\pi * \phi^0}{360^0} = \frac{6{,}28 * 250^0}{360^0} = 4{,}36$$

Winkelgeschwindigkeit

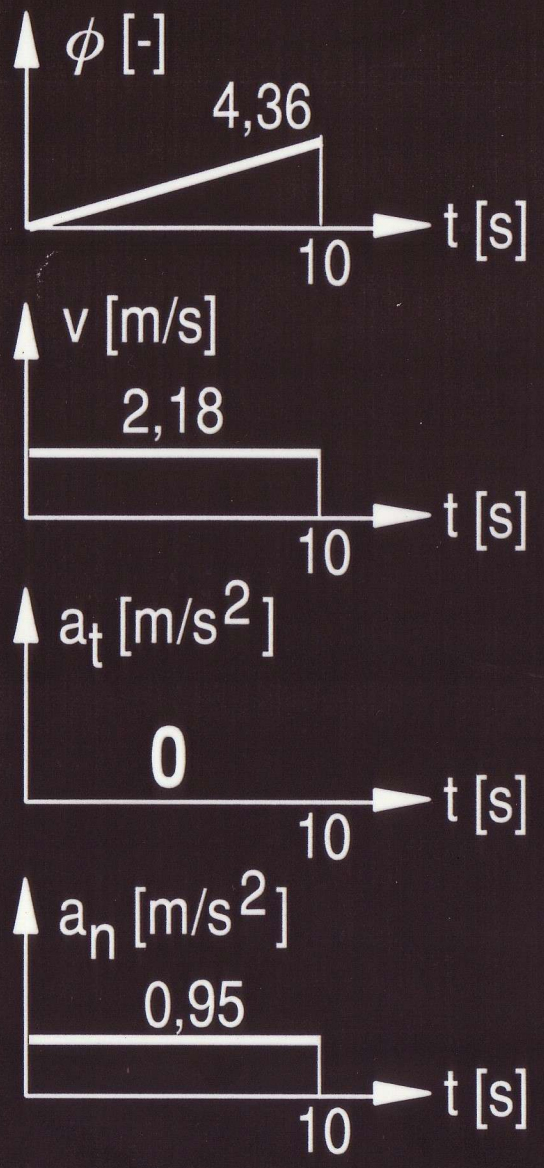
$\omega = \phi / t = 4{,}36 / 10 = 0{,}436$ [1/s] , [rad/s]

1 rad $\hat{=}$ $180^0/\pi$ = 57,29... Grad

Winkelbeschleunigung

$\alpha = d\omega / dt = 0$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 0{,}436$ [rad/s] Winkelbeschleunigung: $\alpha = 0$



Zurückgelegter Winkel ϕ

$\phi = \omega\, t = 0{,}436\, t$

$\phi\,(t = 10) = 4{,}36$ rad

Bahngeschwindigkeit v

$v = r\,\omega = 5 \cdot 0{,}436 = 2{,}18$ [m/s]

Tangentialbeschleunigung a_t

$a_t = dv / dt = 0$

Normalbeschleunigung a_n

$a_n = v^2 / r = 2{,}18^2 / 5 = 0{,}95$ [m/s^2]

Zurückgelegter Weg s

$s = v\,t = 2{,}18 \cdot 10 = 21{,}8$ m

oder $s = r\,\widehat{\phi} = 5 \cdot 4{,}36 = 21{,}8$ m

2.2.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \omega / t = \text{konst}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \alpha\, t$ (lineare Funktion)

Bahngeschwindigkeit: $v = r\,\omega$ (lineare Funktion)

Tangentialbeschleunigung: $a_t = r\,\alpha = r\,\omega / t$ (konst)

Normalbeschleunigung: $a_n = v^2 / r = \underbrace{r\,\omega^2}_{v = r\,\omega} = v\,\omega$

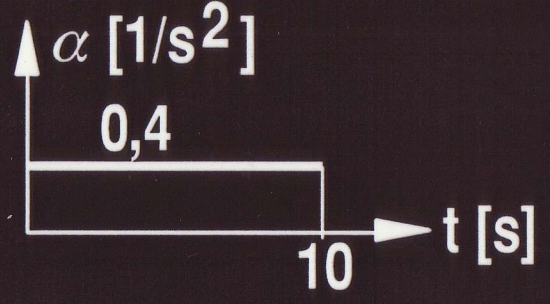
(quadr. Parabel)

Beispiel : Eine Punktmasse bewegt sich aus dem Stillstand gleichförmig beschleunigt auf einer Kreisbahn mit $r = 5$ m. Nach 10 s erreicht sie eine Geschwindigkeit von 20 m/s.

Gesucht : a. Bewegungsgleichungen und Diagramme

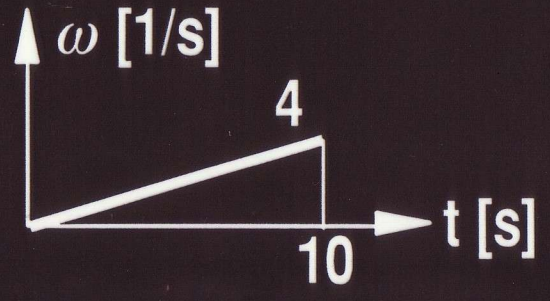
$$\alpha(t)\,,\ \omega(t)\,,\ \phi(t)\,,\ v(t)\,,\ a_t(t) \text{ und } a_n(t)$$

b. Wie groß ist der zurückgelegte Weg auf dem Kreisbogen ?



Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{v}{r\,t} = \frac{20}{5 \cdot 10} = 0{,}4\ [1/s^2]$$

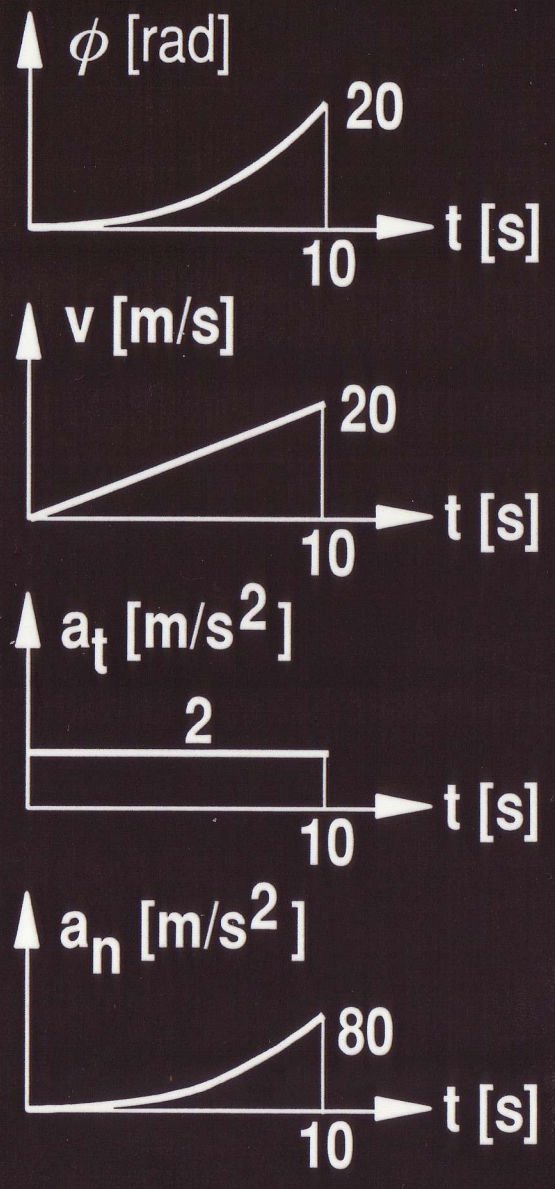


Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \alpha\, t = 0{,}4\, t$$

$$\omega\ (t = 10) = 4\ [1/s]$$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = 0{,}4\ [1/s^2]$ Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \alpha\, t = 0{,}4\, t$



$$\phi = \int \omega\, dt = \int 0{,}4 \cdot t\, dt = 0{,}2 \cdot t^2 + C$$

$$t = 0,\ \phi = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow \boxed{\phi = 0{,}2 \cdot t^2}$$

$\phi\ (t=10) = 20$ [-] bzw. [rad] $\approx$ 3 Runden

$$v = r\,\omega = 5 \cdot 0{,}4 \cdot t = 2\,t$$

$$v\ (t = 10) = 20\ [m/s]$$

Tangentialbeschleunigung

$$a_t = r\,\alpha = 5 \cdot 0{,}4 = 2\ [m/s^2]$$

Normalbeschleunigung

$$a_n = r\,\omega^2 = 5 \cdot 0{,}4^2 \cdot t^2 = 0{,}8\, t^2$$

$$a_n\ (t = 10) = 80\ [m/s^2]$$

$$s = r\,\widehat{\phi} = 5 \cdot 20 = 100\ m$$

oder $s = \int v\, dt = \int 2t\, dt = t^2 + \overset{0}{C} = t^2$

$$s\ (t = 10) = 100\ m$$